OLIMPIADA DE MATEMATICA
FAZA LOCALA
18.02.2012
Clasa a IX-a

BAREM DE EVALUARE

SUBIECTUL I.

Arătați că:

$$\sum_{k=1}^{2012} \frac{2k+1}{\sqrt{k\cdot(k+1)}} > 4024.$$

Rezolvare

Dezvoltând suma dată obținem:

$$\frac{3}{\sqrt{2}}+\frac{5}{\sqrt{6}}+\frac{7}{\sqrt{12}}+\cdots+\frac{4025}{\sqrt{2012\cdot 2013}} > 4024.$$

Ştim că : $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}, \forall\, x,y>0 \Rightarrow \frac{x+y}{\sqrt{xy}} \geq 2$ (2p) şi $\frac{2k+1}{\sqrt{k\cdot(k+1)}} = \frac{k+(k+1)}{\sqrt{k\cdot(k+1)}}$.(1p)

Putem scrie:

$$\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{1+2}{\sqrt{1\cdot 2}} \geq 2,$$

$$\frac{5}{\sqrt{6}} = \frac{2+3}{\sqrt{2\cdot 3}} \geq 2$$

$$\frac{7}{\sqrt{12}} = \frac{3+4}{\sqrt{3\cdot 4}} \geq 2$$

……………………

$$\frac{4025}{\sqrt{2012\cdot 2013}} = \frac{2012+2013}{\sqrt{2012\cdot 2013}} \geq 2$$.(3p)

Adunând relațiile de mai sus obținem:

$$\frac{3}{\sqrt{2}}+\frac{5}{\sqrt{6}}+\frac{7}{\sqrt{12}}+\cdots+\frac{4025}{\sqrt{2012\cdot 2013}} > 4024.$$ (1p)

Adică $\sum_{k=1}^{2012} \frac{2k+1}{\sqrt{k\cdot(k+1)}} > 4024.$ Q.E.D.

SUBIECTUL II.

Să se determine : S = $\left[\sum_{k=1}^{2012} \left[\frac{1}{k^2}\right]\right]$, unde [a] reprezintă partea întreagă a numărului real a.

Rezolvare: $\sum_{k=1}^{2012}\frac{1}{k^2}=1+\sum_{k=2}^{2012}\frac{1}{k^2}$ (1p)

Avem relația evidentă : $\frac{1}{k^2}<\frac{1}{k(k-1)}=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$, pentru k≥ 2. Adică

$\frac{1}{k^2}<\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$ **pentru k ≥ 2.** (2p)

Însumând după k obținem: $\sum_{k=2}^{2012}\frac{1}{k^2}<\sum_{k=2}^{2012}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2011}-\frac{1}{2012}=$

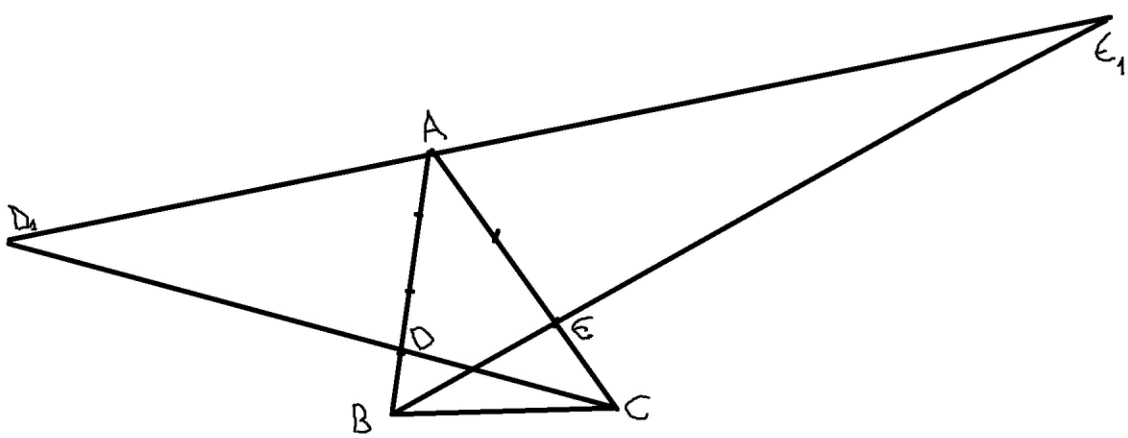
$=1-\frac{1}{2012}=\frac{2011}{2012}<1$ (2p) => $\left[\sum_{k=2}^{2012}\frac{1}{k^2}\right]=0$ (1p) => $\left[\sum_{k=1}^{2012}\left[\frac{1}{k^2}\right]\right]=1$ (1p)

Deci S=1.

SUBIECTUL III

Pe laturile [AB] şi [AC] ale triunghiului ABC se consideră punctele D, respectiv E, astfel încât $\frac{AD}{AB}=\frac{3}{4}$, $\frac{AE}{AC}=\frac{2}{3}$ .Pe dreptele BE, respectiv CD se consideră punctele E_1 şi D_1 astfel încât $\overrightarrow{EE_1}=3\overrightarrow{BE}$ şi $\overrightarrow{DD_1}=2\overrightarrow{CD}$ .Să se demonstreze că punctele E_1 ,A şi D_1 sunt coliniare.

Dem.



$\overrightarrow{AE_1}=\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AB}+4\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE}\right)=\overrightarrow{AB}-4\overrightarrow{AB}+4\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}=-3\overrightarrow{AB}+\frac{8}{3}\overrightarrow{AC}$ (2p)

$\overrightarrow{AD_1}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD_1}=\overrightarrow{AC}+3\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+3\left(\overrightarrow{CA}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}\right)=\overrightarrow{AC}-3\overrightarrow{AC}+\frac{9}{4}\overrightarrow{AB}=\frac{9}{4}\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$ (2p)

$\overrightarrow{AE_1}=-3\overrightarrow{AB}+\frac{8}{3}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AD_1}=\frac{9}{4}\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$

$\frac{-3}{\frac{9}{4}}=\frac{\frac{8}{3}}{-2}$ ⇔6=6(2p) =>$\overrightarrow{AE_1}$, $\overrightarrow{AD_1}$ sunt vectori paraleli .Deci A, E_1 şi D_1 sunt coliniare.(1p)Q.E.D.

SUBIECTUL IV.

În triunghiul ABC fie I centrul cercului înscris în triunghi, G centrul de greutate, $AB = c, BC = a, CA = b$.

a) Demonstrați, că pentru orice punct P din planul triunghiului are loc relația

$$\overrightarrow{PI} = \frac{1}{a+b+c} \cdot \left(a \cdot \overrightarrow{PA} + b \cdot \overrightarrow{PB} + c \cdot \overrightarrow{PC}\right).$$

b) Exprimați $\overrightarrow{IG}$ în funcție de vectorii $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{AC}$.

c) În ce condiții vor fi IG și AC paralele?

Rezolvare

a) Aplicarea teoremei bisectoarei 2 puncte

- În triunghiul ABC : $\frac{BE}{EC} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}$

- În triunghiul ABE : $\frac{AI}{IE} = \frac{AB}{BE} = \frac{c}{\frac{ac}{b+c}} = \frac{b+c}{a}$

Scrierea vectorilor de poziție $\overrightarrow{PI}, \overrightarrow{PE}$ 2 puncte

$$\overrightarrow{PE} = \frac{1}{1+\frac{c}{b}} \cdot \overrightarrow{PB} + \frac{\frac{b}{c}}{1+\frac{b}{c}} \cdot \overrightarrow{PC} = \frac{b}{b+c} \cdot \overrightarrow{PB} + \frac{c}{b+c} \cdot \overrightarrow{PC}$$

$$\overrightarrow{PI} = \frac{1}{1+\frac{b+c}{a}} \cdot \overrightarrow{PA} + \frac{\frac{b+c}{a}}{1+\frac{b+c}{a}} \cdot \overrightarrow{PE} = \cdots = \frac{1}{a+b+c} \cdot \left(a \cdot \overrightarrow{PA} + b \cdot \overrightarrow{PB} + c \cdot \overrightarrow{PC}\right)$$

b) Scrierea vectorilor $\overrightarrow{\mathbf{AI}}, \overrightarrow{\mathbf{AG}}$ 2 puncte

$$\overrightarrow{AI} = \frac{b}{a+b+c} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{c}{a+b+c} \cdot \overrightarrow{AC}$$
$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{AC}$$

Deci $\overrightarrow{IG} = \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AI} = \frac{2b-a-c}{3(a+b+c)} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{2c-a-b}{3(a+b+c)} \cdot \overrightarrow{AC}$

c) $2b = a + c$ este condiția necesară. 1 punct